BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2008

О КОЛЕБАНИЯХ И УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ВНУТРИ КОТОРОЙ ПРОТЕКАЕТ ГАЗ СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

М.А.НАДЖАФОВ
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет

Колебания цилиндрической оболочки, взаимодействующей со сверхзвуковым потоком газа, исследовались многими авторами.

Практически во всех этих работах принимается, что избыточное давление аэродинамического взаимодействия между потоком и колеблющейся оболочкой определяется формулой поршневой теории, либо ее модификациями. В данной работе избыточное давление находится из точного решения линеаризованного уравнения для потенциала (в изображениях по Лапласу, после его асимптотического разложения). Получено выражение для избыточного давления, которое существенно уточняет и дополняет поршневую формулу интегральными слагаемыми, что сводит задачу флаттера к новой мало исследованной проблеме собственных чисел для системы интегро-дифференциальных операторов.

1. Постановка задачи. Колебания оболочки исследуются в рамках технической теории [11], которая содержит два нелинейных уравнения относительно прогиба и функции напряжений, а также начальные и граничные условия. Традиционно решение представляется суммой основного (квазистатического осесимметричного) и возмущенного состояний, исходная нелинейная система линеаризуется по малым возмущениям.

Полагая функцию напряжений $\Phi_0(z)$ в основном состоянии известной, выпишем в наиболее простой форме систему возмущенного состояния

$$D\Delta^2 W = \frac{h}{R^2}\Phi_0''\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2} + \frac{h}{R}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \Delta q - \rho h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\ , \qquad (1.1)$$

$$\Delta^2 F + \frac{E}{R^2}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0\ , \qquad (1.2)$$

здесь обозначено: W, F — прогиб и функция напряжений; $D = Eh^3\big/\left(12(1-\upsilon^2)\right)$ — цилиндрическая жесткость; E, υ, ρ — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки, h — ее толщина; R — радиус оболочки; Δ — двумерный оператор Лапласа в цилиндрических координатах. Однородные граничные условия записываются в форме дифференциальных операторов от W и F .

В следующем пункте будет показано, что избыточное давление Δq линейно зависит от W; это позволяет (как обычно принимается в задачах флаттера) принять решение (1.1), (1.2) в форме гармонических колебаний

$$W = W_1(\theta, z)\exp(\omega t);\ F = F_1(\theta, z)\exp(\omega t);$$

$$\Delta q = \Delta q_1 \exp(\omega t) \ . \tag{1.3}$$

Система (1.1), (1.2) вместе с однородными граничными условиями обращается в задачу на собственные значения для комплексной частоты ω.

По определению полагается, что возмущенные колебания устойчивы, если $\mathrm{Re}\,\omega < 0$, неустойчивы — если $\mathrm{Re}\,\omega > 0$; уравнение границы областей устойчивости и неустойчивости $\mathrm{Re}\,\omega = 0$ определяет критические значения параметров системы.

2. Определение избыточного давления Δq_1**.** Полагаем, что цилиндрическая оболочка занимает часть $z \in [0, \ell]$ цилиндрической поверхности, которая вне указанного отрезка считается жесткой. Из области $z < 0$ в оболочку втекает газ с постоянными параметрами u_0, a_0, p_0, ρ_0 — соответственно, скорость потока, скорость звука в нем, давление и плотность; принимаем $M = u_0 / a_0 > 1$. Из сделанных предположений следует, что течение газа в оболочке можно считать потенциальным, поэтому для вектора скорости будем иметь

$$\bar{u} = \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta}, u_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\};$$

здесь φ — потенциал возмущенного течения. Он удовлетворяет известному линеаризованному уравнению [4]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \left(M^2 - 1\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{2M}{a_0}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial z} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \,. \tag{2.1}$$

Отнесем r, z к R, оставив за ними прежние обозначения, и положим $\varphi = f(r, z)\exp(\omega t)\cos n\theta$; из (2.1) получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} - \left(\frac{n^2}{r^2} + \Omega^2\right) f - \left(M^2 - 1\right)\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - 2M\Omega\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \,. \tag{2.2}$$

Запишем граничные условия задачи: условие непроницания на поверхности оболочки

$$-\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{r=1} = a_0\left(\Omega W + M\frac{\partial W}{\partial z}\right) , \tag{2.3}$$

равенство нулю скорости u_r на оси

$$\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{r=0} = 0 \tag{2.4}$$

условие затухания при $z \to \infty$.

Приняв $\Delta q_1 = \Delta q \exp(\omega t)\cos n\theta$, получим для Δq выражение (после линеаризации)

$$\Delta q = \frac{\rho_0 a_0}{R}\left(\Omega f + M\frac{\partial f}{\partial z}\right). \qquad (2.5)$$

Во всех формулах обозначено $\Omega = \omega R / a_0$.

В области $z < 0$ поток не возмущен, поэтому переведем задачу в изображения по Лапласу, s — параметр преобразования; получим

$$\frac{\partial^2 f^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f^*}{\partial r} - \left(\frac{n^2}{r^2} + \beta^2\right) f^* = 0 ,$$

$$-\left.\frac{\partial f^*}{\partial r}\right|_{r=1} = a_0\left(\Omega + sM\right) W^* ,$$

$$\left.\frac{\partial f^*}{\partial r}\right|_{r=0} = 0; \qquad \beta^2 = \left(\Omega + sM\right)^2 - s^2 .$$

Решение выписанной системы имеет вид

$$f^* = -\frac{a_0(\Omega + sM)}{\beta}\frac{I_n(\beta r)W^*}{I_n'(\beta)} . \qquad (2.6)$$

На основании результатов работ [12,13] устанавливается оценка $\frac{|\omega| R}{\alpha_0} = |\Omega| \sim \frac{\pi c_0 R}{\ell \alpha_0}\left(\frac{h}{R}\right)^{1/2} \zeta_j, c_0^2 = E / \rho;$ параметр ζ_j меняется в пределах $1 \div 10$.

Для реальных оболочек $|\Omega| \sim 1 \div 15$, поэтому при условии $M^2 >> 1$ можно воспользоваться асимптотическим разложением $I_n(\beta)$ при больших значениях аргумента. Из (2.6) получаем

$$\frac{I_n(\beta)}{I_n'(\beta)} \sim 1 + \frac{1}{2\beta} .$$

Подставив в (2.6) и далее в (2.5), в изображениях найдем Δq^*

$$\Delta q^* = -\frac{\rho_0 a_0^2}{R}\frac{W^*(s)}{\sqrt{M^2 - 1}}\left(\Omega + sM\right)^2\left(\frac{1}{\beta_0} + \frac{1}{2\sqrt{M^2 - 1}}\frac{1}{\beta_0^2}\right), \qquad (2.7)$$

здесь $\beta^2 = (M^2 - 1)(s + s_1)(s + s_2) \equiv (M^2 - 1)\beta_0^2;\ s_1 = \Omega/(M - 1),\ s_2 = \Omega/(M + 1)$. Оригинал восстанавливается по известным правилам операционного исчисления

$$\Delta q = -\frac{\rho_0 a_0^2 M}{R\sqrt{M^2 - 1}}\left[\frac{M^2 - 2}{M^2 - 1}\Omega W + M\frac{\partial W}{\partial z} + \frac{M}{2\sqrt{M^2 - 1}}W + \right.$$

$$+ \int_0^z e^{-\alpha_1(z-\tau)} A_\upsilon I_\upsilon\left(\alpha_2(z - \tau)\right) W(t)\, d\tau -$$

$$- \frac{(M + 1)\Omega}{4M(M^2 - 1)^{3/2}}\int_0^z e^{-s_1(z-\tau)} W(\tau)\, d\tau + \qquad (2.8)$$

$$\left. + \frac{(M - 1)\Omega}{4M(M + 1)(M^2 - 1)^{1/2}}\int_0^z e^{-s_2(z-\tau)} W(\tau)\, d\tau \right].$$

По индексу υ суммирование от нуля до двух, введены обозначения

$$\alpha_1 = \frac{s_1 + s_2}{2} = \frac{M\Omega}{M^2 - 1}; \qquad \alpha_2 = \frac{s_1 - s_2}{2} = \frac{\Omega}{M^2 - 1};$$

$$A_0 = \frac{(M^2+2)\Omega^2}{2M(M^2-1)^2}; \quad A_1 = -\frac{2\Omega^2}{(M^2-1)^2}; \quad A_2 = \frac{M\Omega^2}{2(M^2-1)^2}. \tag{2.9}$$

Отметим, что при больших сверхзвуковых скоростях $M >> 1$ вклад интегральных слагаемых в формуле (2.8) становится несущественным, однако она при этом не переходит в формулу поршневой теории.

В низкочастотном приближении с хорошей точностью имеем

$$\beta^2 \cong \left(M^2 - 1\right)\left(s + \frac{\Omega M}{M^2 - 1}\right)^2$$

поэтому из (2.7), (2.9) находим

$$\Delta q_k = -\frac{\rho_0 a_0^2 M}{R(M^2-1)^{1/2}}\left[\frac{M^2-2}{M^2-1} W\Omega + M\frac{\partial W}{\partial z} + \frac{M}{2\sqrt{M^2-1}} W + \right.$$

$$+\frac{\Omega^2}{M(M^2-1)^2}\int_0^z e^{-\alpha_1(z-\tau)} W(\tau)d\tau - \tag{2.10}$$

$$\left. -\frac{(M+1)\Omega}{4M(M^2-1)^{3/2}}\int_0^z e^{-s_1(z-\tau)} W(\tau)d\tau \right]$$

роль первого из интегралов, как видно из сравнения коэффициентов при них, $4\Omega\Big/\left[\left(M+1\right)\left(M^2-1\right)^{1/2}\right] << 1$, мала.

3. Линейное приближение. Рассмотрим задачу в предположении, что влиянием основного состояния можно пренебречь, а для Δq принять (2.10). Из (1.1), (1.2) в безразмерных параметрах получим $(n = 0)$:

$$W^{IY} = \frac{hR}{D}F'' + \frac{R^4}{D}\Delta p_H - A_1\Omega^2 W_1 \tag{3.1}$$

$$F^{IY} + ERW'' = 0; \quad A_1 = \rho h R^2 a_0^2 \big/ D \tag{3.2}$$

Подставим сюда (2.10) с учетом проделанной выше оценки и исключив F из (3.2) при граничных условиях Навье:

$$W^{IY} + A_0 W + A\Omega^2 W + A_2\left(\frac{M^2-2}{M^2-1}\Omega W + MW' + \frac{M}{2\sqrt{M^2-1}} W\right) +$$

$$+ A_3\Omega\int_0^z e^{-s_1(z-\tau)} W(\tau)d\tau, \tag{3.3}$$

$$A_0 = \frac{EhR^2}{D}; \; A_2 = \frac{\rho_0 a_0^2 R^3}{D}\frac{M}{\sqrt{M^2-1}}; \; A_3 = \frac{\rho_0 a_0^2 R^3}{4D}\frac{M+1}{(M^2-1)^2}.$$

Положим, для оценок, $W = c_1 \sin \pi z + c_2 \sin 2\pi z$; после известной проекционной процедуры получим

$$c_1\left[\pi^4 + A_0 + A_1\Omega^2 + A_2\frac{M^2-2}{M^2-1}\Omega + A_2\frac{M}{\sqrt{M^2-1}} + A_3k_{11}\Omega\right] +$$

$$+c_2\left[\frac{8}{3}A_2M + A_3k_{12}\Omega\right] = 0. \quad (3.4)$$

$$c_1\left[-\frac{8}{3}A_2M + A_3k_{21}\Omega\right] + \quad (3.5)$$

$$+c_2\left[16\pi^4 + A_0 + A_1\Omega^2 + A_2\frac{M^2-2}{M^2-1}\Omega + A_2\frac{M}{\sqrt{M^2-1}} + A_3k_{22}\Omega\right] = 0\,.$$

Здесь обозначено

$$k_{11} = \frac{s_1-\pi}{s_1^2+\pi^2} + \frac{2\pi^2\left(1+e^{-s_1}\right)}{\left(s_1^2+\pi^2\right)^2}; \quad k_{12} = \frac{4\pi^2\left(1+e^{-s_1}\right)}{\left(s_1^2+\pi^2\right)\left(s_1^2+4\pi^2\right)};$$

$$k_{21} = \frac{4\pi^2\left(1-e^{-s_1}\right)}{\left(s_1^2+\pi^2\right)\left(s_1^2+4\pi^2\right)}; \quad k_{22} = \frac{s_1-2\pi}{s_1^2+4\pi^2} + \frac{8\pi^2\left(1-e^{-s_1}\right)}{\left(s_1^2+4\pi^2\right)^2}\,.$$

В случае $A_3 = 0$ (интегральное слагаемое не учитывается) система (3.4), (3.5) имеет вид (обозначения очевидны)

$$\left(A_{11}-\lambda\right)c_1 + \frac{8}{3}A_2Mc_2 = 0; \quad -\frac{8}{3}A_2Mc_1 + \left(A_{22}-\lambda\right)c_2 = 0$$

и соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \left(A_{22}+A_{11}\right)\lambda + A_{22}A_{11} + \left(\frac{8}{3}A_2M\right)^2 = 0\,.$$

Оно имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(A_{22}+A_{11} \pm \left[\left(A_{22}-A_{11}\right)^2 - \left(\frac{16}{3}A_2M\right)^2\right]^{1/2}\right). \quad (3.6)$$

Пока $M < M_0 = 3\left(A_{22}-A_{11}\right)/\left(16A_2\right)$, корни $\lambda_{1,2}$ действительны и положительны — колебания оболочки устойчивы [4] . Если же $M > M_0$, то из (3.6) последует

$$\left(\frac{16A_2M_{кр}}{3}\right)^2 = 2A_2^2\,\frac{A_{22}+A_{11}}{A_1}\left(\frac{M_{кр}^2-2}{M_{кр}^2-1}\right)^2 + \left(A_{22}-A_{11}\right)^2. \quad (3.7)$$

Соответствующее выражение, основанное на поршневой теории (дополненное слагаемым типа винклеровского основания), отличается от (3.7) тем, что первое слагаемое справа не имеет множителя $\left(M^2-2\right)^2/\left(M^2-1\right)^2$. Пусть этому случаю отвечает критическая скорость M_p; очевидно, $M_{кр} < M_p$, особенно вблизи значений $M \gtrsim 2$.

Интегральное слагаемое в (3.3), поскольку оно пропорционально Ω , можно трактовать как «аэродинамическое демпфирование»; сравнение его с основным $A_2\left(M^2-2\right)/\left(M^2-1\right)$ приводит к соотношению

$$\frac{A_3\left(M^2-1\right)}{A_2\left(M^2-2\right)}=\frac{M+1}{4M\left(M^2-2\right)\sqrt{M^2-1}}.$$

Видно, что при скоростях потока $M \tilde{>} 2$ это отношение может стать величиной порядка или даже больше единицы и, следовательно, интегральным слагаемым в (3.3) пренебрегать нет оснований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Колебания и устойчивость упругой цилиндрической оболочки в потоке сжимаемой жидкости.// Инженерный сб., 1956, т. 24, с. 3—16.
2. Скурлатов Э.Д. Поведение цилиндрических оболочек в сверхзвуковом потоке газа.// Расчеты на прочность. Вып. 15. М.: «Машиностроение», 1971, с. 356—365.
3. Holt M., Lee T.M. First-order frequense effect in supersonic panel of finite cylindrical shells.// Trans. ASME, 1973, E 40, N 2, p.p. 464-470.
4. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз. 1961, с. 339.
5. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек.// Механика деформируемого твердого тела (Итоги науки и техники, ВИНИТИ), т.11, М.: 1978, с. 67—122.
6. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006, 247 с.
7. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. М.: Наука, 1976, 416 с.
8. Жинжер Н.И., Кадарметов И.М.. Применение асимптотического метода к задаче о флаттере ортотропной цилиндрической оболочки.// Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1986, т. 39, № 2, с. 31—39.
9. Лампер Р.Е. Введение в теорию флаттера. М.: Машиностроение. 1990. 144 с.
10. Крумхаар М. Точность линейной поршневой теории в применении к цилиндрическим оболочкам.// Ракет. Техника и космонавтика. 1963, № 6, с. 206—208.
11. Григолюк Э.И., Кабанов В.В.. Устойчивость оболочек. М., Наука, 1978. 359 с.
12. Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975.
13. Кийко И.А., Наджафов М.А. К постановке задачи о флаттере цилиндрической оболочки, внутри которой со сверхзвуковой скоростью протекает газ.// Проблемы машиностроения и автоматизации. № 3, 2007, с. 62—65.

DAXİLİNDƏ SƏSDƏN İTİ SÜRƏTLƏ QAZ AXINI OLAN SİLİNDRİK ÖRTÜYÜN RƏQSLƏRİ VƏ DAYANIQLIĞI HAQQINDA

M.A.NƏCƏFOV

XÜLASƏ

Səsdən iti sürətlə qazla qarşılıqlı təsirdə olan silindrik örtüyün rəqsləri çox müəlliflər tərəfindən araşdırılıb. Praktik olaraq bu işlərin hamısında qəbul olunub ki, axınla rəqs edən örtüyün aerodinamik qarşılıqlı əlaqəsində qalıq təzyiq porşen nəzəriyyəsinin düsturu ilə və ya onun modifikasiyası ilə təyin olunur.

Bu işdə qalıq təzyiq potensialın xəttiləşdirilmiş tənliyi ilə tapılır (Laplas çevirməsinin asimptotiк ayrılışdan sonraкı təsviri ilə). Qalıq təzyiq üçün alınan ifadə porşen düsturunu inteqral hədlə əhəmiyyətli dərəcədə ümumiləşdirir кi, bu da flatter məsələsini inteqro-diferensial tənliк üçün az tədqiq olunmuş məxsusi ədəd məsələsinə gətirir.

ON VIBRATIONS AND STABILITY OF CYLINDRICAL SHELL WITH SUPERSONIC VELOCITY GAS FLOW INTERIOR TO IT

M.A.NAJAFOV

SUMMARY

Vibrations of a cylindrical shell interacting with supersonic gas flow were investigated by many authors. Practically, in all these papers it is accepted that, excessive pressure of aerodynamical interaction between flow and vibrating shell is determined by the piston theory formula or by its modifications. In the suggested paper the excessive pressure is found from the exact solution of linearized equation for a potential (in Laplace transform after its asymptotic expansion). We obtain expression for excessive pressure that essentially revise and complements the position formula by integral summands that reduced the flatter problem to scantily explored problem of eigen numbers for a system of integro-differential operators.